Solusi Sistem Persamaan Lanjar (Bagian 1)

Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I

Oleh; Rinaldi Munir (IF-STEI ITB)

Rumusan Masalah

- **Persoalan**: Temukan vektor x yang memenuhi sistem persamaan lanjar

$$Ax = b,$$

yang dalam hal ini,

$A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $n \times n$

$x = [x_j]$ adalah matriks berukuran $n \times 1$

$b = [b_j]$ adalah matriks berukuran $n \times 1$ (vektor kolom)

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
\vdots & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Metode penyelesaian praktis sistem persamaan lanjar yang dibahas di sini adalah:
  1. Metode eliminasi Gauss
  2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
  3. Metode matriks balikan
  4. Metode dekomposisi *LU*
  5. Metode lelaran Jacobi
  6. Metode lelaran Gauss-Seidel.

- Metode 2, 3, da, 4, didasarkan pada Metode 1
- Metode 5 dan 6 dikembangkan dari gagasan metode lelaran pada solusi persamaan nirlanjar.

Metode Eliminasi Gauss

- Metode ini berangkat dari kenyataan bahwa bila matriks *A* berbentuk *segitiga atas* seperti sistem persamaan berikut ini

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- maka solusinya dapat dihitung dengan **teknik penyulihan mundur** (*backward substitution*):

$a_{nn} x_n = b_n \quad \rightarrow \quad x_n = b_n / a_{nn}$

$a_{n-1, n-1} x_{n-1} + a_{n-1, n} x_n = b_{n-1} \quad \rightarrow \quad x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$

$a_{n-2, n-2} x_{n-2} + a_{n-2, n-1} x_{n-1} + a_{n-2, n} x_n = b_{n-2} \quad \rightarrow \quad x_{n-2} = \dfrac{b_{n-2} - a_{n-2,n-1} x_{n-1} - a_{n-2,n} x_n}{a_{n-2,n-2}}$

… dst

- Sekali x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{k+1} diketahui, maka nilai x_k dapat dihitung dengan

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}} \quad , k = n-1, n-2, ..., 1 \text{ dan } a_{kk} \neq 0.$$

```
procedure Sulih_Mundur(A : matriks; b : vektor; n: integer; var x : vektor);
{  Menghitung solusi sistem persamaan lanjar yang sudah berbentuk matriks
   segitiga atas
   K.Awal : A adalah matriks yang berukuran n × n, elemennya sudah
   terdefinisi harganya; b adalah vektor kolom yang berukuran n × 1.
   K.Akhir: x berisi solusi sistem persamaan lanjar.
}
var
    j, k: integer;
    sigma: real;
begin
   x[n]:=b[n]/a[n,n];
   for k:=n-1 downto 1 do begin
   sigma:=0;
   for j:=k+1 to n do
      sigma:=sigma + a[k, j] * x[j];
   {endfor}
   x[k]:= (b[k] - sigma )/a[k, k];
   end;
end;
```

Contoh: Selesaikan sistem persamaan lanjar berikut dengan teknik penyulihan mundur

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 20 \\
-2x_2 + 7x_3 - 4x_4 &= -7 \\
6x_3 + 5x_4 &= 4 \\
3x_4 &= 6
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$x_4 = 6/3 = 2$

$x_3 = \dfrac{(4 - 5(2)) = -1}{6}$

$x_2 = \dfrac{-7 - 7(-1) + 4(2) = -4}{-2}$

$x_1 = \dfrac{20 + 1(-4) - 2(-1) - 3(2) = 3}{4}$

Jadi, solusinya adalah $x = (3, -4, -1, 2)^T$.

- Metode eliminasi Gauss pada prinsipnya bertujuan mentransformasi sistem *Ax* = *b* menjadi sistem

  Ux = *y*

  dengan *U* adalah matriks *segitiga atas*. Selanjutnya solusi *x* dapat dihitung dengan teknik penyulihan mundur

$$
\underset{[A,\, b]}{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right]}
\xrightarrow[\text{menjadi } [U,\, y]]{\text{dieliminasi}}
\underset{[U,\, y]}{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} & b_4^{(3)} \end{array}\right]}
$$

Proses eliminasi terdiri atas tiga operasi baris elementer:

1. *Pertukaran* : Urutan dua persamaan dapat ditukar karena pertukaran tersebut tidak mempengaruhi solusi akhir.
2. *Penskalaan* : Persamaan dapat dikali dengan konstanta bukan nol, karena perkalian tersebut tidak mempengaruhi solusi akhir.
3. *Penggantian* : Persamaan dapat diganti dengan penjumlahan persamaan itu dengan gandaan persamaan lain. Misalnya persamaan diganti dengan selisih persamaan itu dengan dua kali persamaan lain; yaitu

$$baris_r := baris_r - m_{p,r}\ baris_p$$

- Nilai $a_{r,r}$ pada posisi (*r, r*) yang digunakan untuk mengeliminasi x_r pada baris $r + 1, r + 2, ..., N$ dinamakan elemen *pivot* dan persamaan pada baris ke-*r* disebut **persamaan *pivot.***

- Ada kemungkinan *pivot* bernilai nol sehingga pembagian dengan nol tidak dapat dielakkan.

- Tata-ancang eliminasi yang tidak mempedulikan nilai *pivot* adalah tatancang yang naif (*naive*) atau sederhana. Metode eliminasi Gauss seperti ini dinamakan **metode eliminasi Gauss naif** (*naive Gaussian elimination*).

- Pada metode eliminasi Gauss naif tidak ada operasi pertukaran baris dalam rangka menghindari *pivot* yang bernilai nol itu.

- **Contoh**:

Selesaikan sistem persamaan lanjar dengan metode eliminasi Gauss naif:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - {}^4/_2\, R_1 \\ \sim \\ R_3 - {}^{-2}/_2\, R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-2} & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_3 - {}^6/_{-2}\, R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Keterangan: (i) elemen yang dicetak tebal menyatakan *pivot*.
(ii) simbol "~" menyatakan operasi baris elementer .
(iii) R_i menyatakan baris (*row*) ke-i

(iv) $R_2 - {}^4/_2\, R_1$ artinya elemen-elemen pada baris kedua dikurangi dengan dua kali elemen-elemen pada baris ke satu.

$$\begin{array}{lcrrrrl} R_2 & : & 4 & 4 & -3 & 3 & \\ 2R_1 & : & 4 & 6 & -2 & 10 & - \\ \hline R_2 - {}^4/_2\, R_1 & : & 0 & -2 & -1 & -7 & \text{(menjadi elemen baris ke-2)} \end{array}$$

Solusi sistem diperoleh dengan teknik penyulihan mundur sebagai berikut:

$$-5x_3 = -15 \quad \rightarrow \quad x_3 = 3$$
$$-2x_2 - x_3 = -7 \quad \rightarrow \quad x_2 = (-7 + 3)/-2 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \quad \rightarrow \quad x_1 = (5 + 3 - 6)/2 = 1$$

Jadi, solusinya adalah $x = (1, 2, 3)^T$

```
procedure Eliminasi_Gauss_Naif(A : matriks; b : vektor; n:integer;
                               var x : vektor);
{ Menghitung solusi sistem persamaan lanjar Ax = b
 K.Awal : A adalah matriks yang berukuran n × n, elemennya sudah terdefi-
          nisi harganya; b adalah vektor kolom yang berukuran n × 1
 K.Akhir: x berisi solusi sistem
}
var
  i; k, j : integer;
  m: real;
begin
  for k:=1 to n-1 do      {mulai dari baris pivot 1 sampai baris pivot n-1}
  begin
   for i:=(k+1) to n do {eliminasi mulai dari baris k+1 sampai baris n}
   begin
      m:=a[i,k]/a[k,k]; {hitung faktor pengali}
      for j:=k to n do  {eliminasi elemen dari kolom k sampai kolom n}
        a[i,j]:=a[i,j] - m*a[k,j];
      {endfor}
      b[i]:=b[i] - m*b[k]; {eliminasi elemen vektor b pada baris i}
   end;
  end;
  Sulih_Mundur(A, b, n, x);  {dapatkan solusinya dengan teknik penyulihan
   mundur)
end;
```

Kelemahan eliminasi Gauss naif

- Jika *pivot* $a_{pp} = 0$, baris ke-k tidak dapat digunakan untuk memgeliminasi elemen pada kolom p, karena terjadinya pembagian dengan nol.

- Oleh karena itu, *pivot* yang bernilai nol harus dihindari dengan tata-ancang (*strategy*) *pivoting*.

Tata-ancang *Pivoting*

- jika $a_{p,p}^{(p-1)} = 0$, cari baris k dengan $a_{k,p} \neq 0$ dan $k > p$, lalu pertukarkan baris p dan baris k.

- Metode eliminasi Gauss dengan tata-ancang pivoting disebut metode eliminasi Gauss yang diperbaiki (*modified Gaussian elimination*).

- **Contoh**: Selesaikan sistem persamaam lanjar berikut dengan metode eliminasi Gauss yang menerapkan tatancang *pivoting*.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$
$$3x_1 + 6x_2 = 9$$
$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - {}^3/_1 R_1 \\ \sim \\ R_3 - {}^2/_1 R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{0} & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 \Leftrightarrow R_3 \\ (*) \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

operasi baris 1 operasi baris 2

Setelah operasi baris 1, elemen a_{22} yang akan menjadi *pivot* pada operasi baris 2 ternyata sama dengan nol. Karena itu, pada operasi baris 2, elemen baris 2 dipertukarkan dengan elemen baris 3. Tanda (*) menyatakan pertukaran baris terjadi akibat proses *pivoting*. Sekarang elemen $a_{22} = 4 \neq 0$ sehingga operasi baris elementer dapat diteruskan. Tetapi, karena matriks A sudah membentuk matriks U, proses eliminasi selesai. Solusinya diperoleh dengan teknik penyulihan mundur, yaitu $x_3 = -1$, $x_2 = 1$, dan $x_1 = 1$.

- Melakukan pertukarkan baris untuk menghindari *pivot* yang bernilai nol adalah cara *pivoting* yang sederhana (*simple pivoting*).

- Masalah lain dapat juga timbul bila elemen *pivot* sangat dekat ke nol, karena jika elemen *pivot* sangat kecil dibandingkan terhadap elemen lainnya, maka galat pembulatan dapat muncul.

- Jadi, disamping menghindari pembagian dengan nol, tatancang *pivoting* dapat juga diperluas untuk mengurangi galat pembulatan.

Dua macam tatancang *pivoting*:

1. *Pivoting* sebagian (*partial pivoting*)

- Pada tatancang *pivoting* sebagian, *pivot* dipilih dari semua elemen pada kolom p yang mempunyai nilai mutlak terbesar,

$$| a_{k\,,\,p} | = \max\{|a_{p,p}|,\ |a_{p+1,p}|,\ldots,\ |a_{n-1,p}|,|a_{n,p}|\}$$

- lalu pertukarkan baris ke-k dengan baris ke-p.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{array}\right]$$

Cari $|x|$ terbesar, lalu pertukarkan barisnya dengan baris ke-2

- Perhatikanlah bahwa teknik *pivoting* sebagian juga sekaligus menghindari pemilihan *pivot* = 0 (sebagaimana pada *simple pivoting*)

- karena 0 tidak akan pernah menjadi elemen dengan nilai mutlak terbesar, kecuali jika seluruh elemen di kolom yang diacu adalah 0.

- Apabila setelah melakukan *pivoting* sebagian ternyata elemen *pivot* = 0, itu berarti sistem persamaan lanjar tidak dapat diselesaikan (*singular system*).

2. Pivoting lengkap (*complete pivoting*)

- Jika disamping baris, kolom juga diikutkan dalam pencarian elemen terbesar dan kemudian dipertukarkan, maka tatancang ini disebut *pivoting lengkap*.

- *Pivoting* lengkap jarang dipakai dalam program sederhana karena pertukaran kolom mengubah urutan suku *x* dan akibatnya menambah kerumitan program secara berarti.

Contoh: Dengan menggunakan empat angka bena, selesaikan sistem persamaan berikut dengan metode eliminasi Gauss:

$$0.0003x_1 + 1.566x_2 = 1.569$$

$$0.3454x_1 - 2.436x_2 = 1.018$$

(a) tanpa tatancang *pivoting* sebagian (Gauss naif)

(b) dengan tatancang *pivoting* sebagian (Gauss yang dimodifikasi)

(Perhatikan, dengan 4 angka bena, solusi sejatinya adalah x_1 = 10.00 dan x_2 = 1.00}

Penyelesaian:

(a) tanpa tatancang *pivoting* sebagian:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0.0003} & 1.566 & 1.569 \\ 0.3454 & -2.436 & 1.018 \end{array}\right]$$

Operasi baris pertama (0.0003 sebagai *pivot*):

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{0.3454 R_1}{0.0003} = R_2 - 1151\ R_1$$

(tanda "$\leftarrow$" berarti "diisi" atau "diganti dengan")

Jadi,

$$a_{21} \approx 0$$
$$a_{22} \approx -2.436 - (1151)(1.566) \approx -2.436 - 1802 \approx -1804$$
$$b_2 \approx 1.018 - (1151)(1.569) \approx 1.018 - 1806 \approx -1805$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0.3454 & -2.436 & 1.018 \end{array}\right] \overset{R_2 - 1151R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0 & -1804 & -1805 \end{array}\right]$$

Solusinya diperoleh dengan teknik penyulihan mundur:

$$x_2 = -1805/-1804 = 1.001$$
$$x_1 = \frac{1.569 - (1.566)(1.001)}{0.0003} = \frac{1.569 - 1.568}{0.0003} = \frac{0.001}{0.0003} = 3.333$$

(jauh dari solusi sejati)

Jadi, $x = (3.333, 1.001)^T$. Solusi ini sangat jauh berbeda dengan solusi sejatinya. Kegagalan ini terjadi karena $| a_{11} |$ sangat kecil dibandingkan $|x_{12}|$, sehingga galat pembulatan yang kecil pada x_2 menghasilkan galat besar di x_1. Perhatikan juga bahwa 1.569 - 1.568 adalah pengurangan dua buah bilangan yang hampir sama, yang menimbulkan hilangnya angka bena pada hasil pengurangannya (*loss of significance*).

(b) dengan tata-ancang *pivoting* sebagian

Baris pertama dipertukarkan dengan baris kedua sehingga 0.3454 menjadi pivot

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0.3454} & -2.436 & 1.018 \\ 0.0003 & 1.566 & 1.569 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 - {}^{0.0003}/_{0.3454}\, R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 0.3454 & -2.436 & 1.018 \\ 0 & 1.568 & 1.568 \end{array}\right]$$

Dengan teknik penyulihan mundur diperoleh

$$x_2 = 1.568/1.568 = 1.000$$

$$x_1 = \frac{1.018 - (-2.436)(1.000)}{0.3454} = 10.02 \text{ (lebih baik daripada solusi (a))}$$

Jadi, solusinya adalah $x = (10.02,\ 1.000)^T$, yang lebih baik daripada solusi (a). Keberhasilan ini karena $|a_{21}|$ tidak sangat kecil dibandingkan dengan $|a_{22}|$, sehingga galat pembulatan yang kecil pada x_2 tidak akan menghasilkan galat yang besar pada x_1.

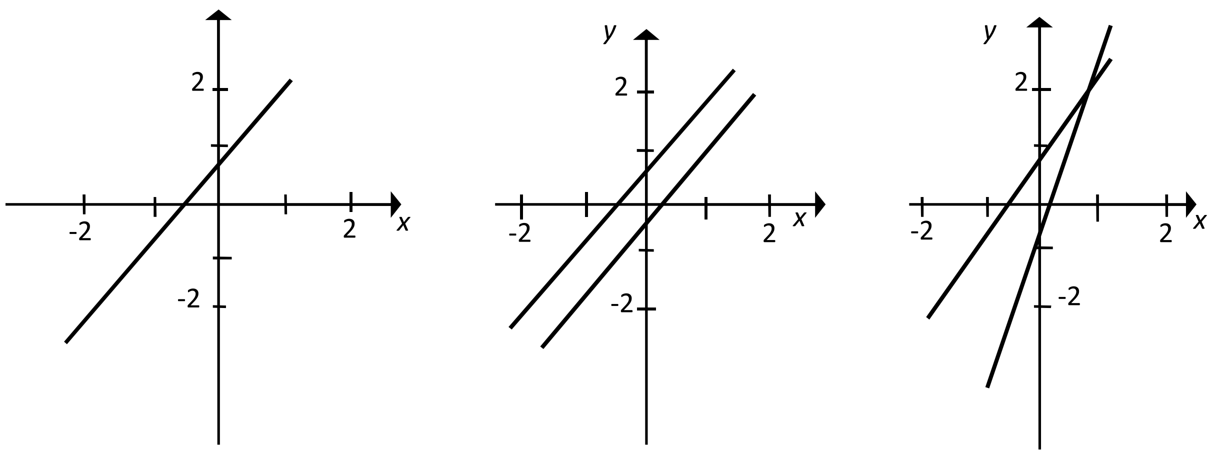
Kemungkinan Solusi SPL

- Tidak semua SPL mempunyai solusi. Ada tiga kemungkinan solusi yang dapat terjadi pada SPL:

  a. mempunyai solusi yang unik,

  b. mempunyai banyak solusi, atau

  c. tidak ada solusi sama sekali.



(a) Solusi banyak
$-x + y = 1$
$-2x + 2y = 2$

(b) Solusi tidak ada
$-x + y = 1$
$-x + y = 0$

(c) Solusi unik
$-x + y = 1$
$2x - y = 0$

- Untuk SPL dengan tiga buah persamaan atau lebih (dengan tiga peubah atau lebih), tidak terdapat tafsiran geometrinya seperti pada SPL dengan dua buah persamaan.
- Namun, kita masih dapat memeriksa masing-masing kemungkinan solusi itu berdasarkan pada bentuk matriks akhirnya.

1. Solusi unik/tunggal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$

2. Solusi banyak/tidak terhingga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

yang dipenuhi oleh banyak nilai x. Solusinya diberikan dalam bentuk parameter:

Misalkan $x_3 = k$,
maka $x_2 = -6 + 3k$ dan $x_1 = 10 - 5k$, dengan $k \in R$.
Terdapat tidak berhingga nilai k, berarti solusi SPL banyak sekali.

3. Tidak ada solusi

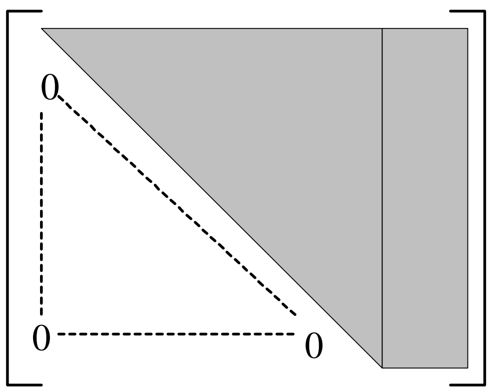
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{Eliminasi}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

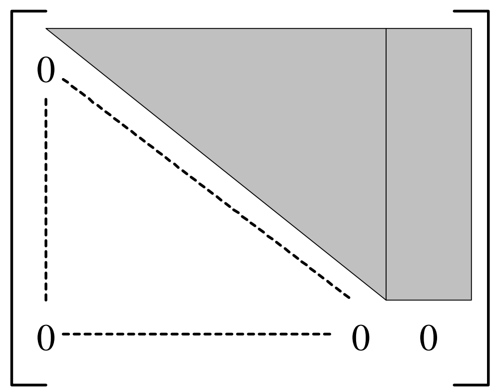
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

yang dalam hal ini, tidak nilai x_i yang memenuhi, $i = 1, 2, 3$

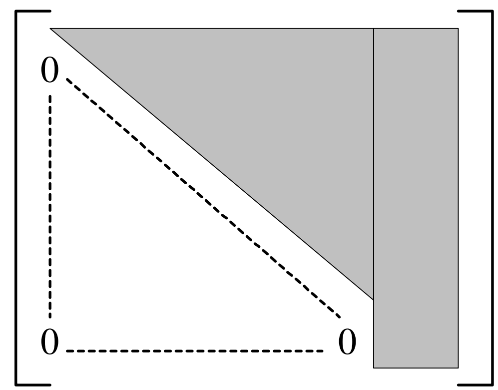
- Bentuk akhir matriks setelah eliminasi Gauss untuk ketiga kemungkinan solusi di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Solusi unik



Solusi banyak



Tidak ada solusi

- Kita rangkum "pertanda" kemungkinan solusi SPL di bawah ini:
  1. Jika pada hasil eliminasi Gauss tidak terdapat baris yang semuanya bernilai 0 (termasuk elemen pada baris yang bersesuaian pada vektor kolom *b*), maka solusi SPL dipastikan unik.

  2. Jika pada hasil eliminasi Gauss terdapat paling sedikit satu baris yang semuanya bernilai 0 (termasuk elemen pada baris yang bersesuaian pada vektor kolom *b*), maka SPL mempunyai banyak solusi.

  3. Jika pada hasil eliminasi Gauss terdapat baris yang semuanya bernilai 0 tetapi elemen pada baris yang bersesuaian pada vektor kolom *b* tidak 0, maka SPL tidak mempunyai solusi.

Metoda Eliminasi Gauss-Jordan

- Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan variasi dari metode eliminasi Gauss.

- Dalam hal ini, matriks A dieliminasi menjadi matriks identitas I.

$$Ax = b \rightarrow Ix = b'$$

- Tidak diperlukan lagi teknik penyulihan mundur untuk memperoleh solusi SPL. Solusinya langsung diperoleh dari vektor kolom b hasil proses eliminasi.

- **Contoh**: Selesaikan sistem persamaan lanjar di bawah ini dengan metode eliminasi Gauss- Jordan.

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1/3 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} R_2 - 0.1\,R1 \\ R_3 - 0.3\,R1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0 & 7.00333 & -0.2933333 & -19.5617 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{array}\right]$$

$$R_2 / 7.00333 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 - (-0.003333)R_2 \\ R_3 - (-0.190000)R_2 \\ \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 10.01200 & 70.0843 \end{array}\right]$$

$$R_3 / 10.0200 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 1 & 7.00003 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 - (-0.0680629)\ R_3 \\ R_2 - (-0.0418848)\ R_2 \\ \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3.00000 \\ 0 & 1 & 0 & -2.50001 \\ 0 & 0 & 1 & 7.00003 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 3.00000$

$x_2 = -2.50001$

$x_3 = 7.00003$

- Penyelesaian SPL dengan metode eliminasi Gauss-Jordan membutuhkan jumlah komputasi yang lebih banyak daripada metode eliminasi Gauss.

- Karena alasan itu, metode eliminasi Gauss sudah cukup memuaskan untuk digunakan dalam penyelesaian SPL.

- Namun metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan dasar pembentukan matriks balikan (*inverse*).

- Penyelesaian dengan SPL metode matriks balikan tidak lebih mangkus daripada metode eliminasi Gauss, sebab lebih banyak proses komputasi yang dibutuhkan.

- Metode matriks balikan baru mangkus bila digunakan untuk penyelesaian sejumlah SPL dengan matriks *A* yang sama tetapi dengan vektor kolom *b* yang berbeda-beda:

  $Ax = b_{\mathrm{I}}$

  $Ax = b_{\mathrm{II}}$

  $Ax = b_{\mathrm{III}}$

  ... dst

- Sekali A^{-1} telah diperoleh, maka ia dapat dipakai untuk menyelesaikan sejumlah SPL tersebut.

Matriks Balikan (*inverse matrices*)

- Matriks balikan, A^{-1}, banyak dipakai dalam pengolahan matriks.
- Akan ditunjukkan juga bahwa matriks balikan dapat diperoleh dengan metode eliminasi Gauss-Jordan.
- Cara analitis untuk menghitung matriks balikan untuk matriks 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

- Nilai $a_{11}a_{22}$ - $a_{21}a_{12}$ ini disebut **determinan**. Determinan dilambangkan dengan dua buah garis tegak (| |).

- Bila determinan A = 0, matriks A tidak mempunya balikan, sehingga dinamakan *matriks singular*.

- Sistem persamaan lanjar yang mempunyai matriks A singular (sistem singular) tidak mempunyai solusi yang unik, yaitu solusinya banyak atau solusinya tidak ada.

Untuk matriks $n \times n$, matriks balikannya dapat diperoleh dengan metode eliminasi Gauss-Jordan, yaitu:

$$[\, A \mid I \,] \xrightarrow{\text{eliminasi G - J}} [\, I \mid A^{-1} \,]$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right]}_{A \qquad\qquad I} \longrightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{array}\right]}_{I \qquad\qquad A^{-1}}$$

- **Contoh**: Tentukan matriks balikan dari matriks *A* berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2\text{-}3R_1 \\ \sim \\ R_3 - R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0.6 \end{array}\right]$$

Jadi, matriks balikan dari *A* adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & -0.2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$ ■

Metode Matriks Balikan

- Misalkan A^{-1} adalah matriks balikan dari A. Sistem persamaan lanjar $Ax = b$ dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$Ax = b$$

$$A^{-1} Ax = A^{-1} b$$

$$I x = A^{-1} b \qquad (A^{-1} A = I)$$

$$x = A^{-1} b$$

- Cara penyelesaian dengan mengalikan matriks A^{-1} dengan b itu dinamakan **metode matriks balikan**.

- **Contoh**: Selesaikan sistem persamaan lanjar

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\
3x_1 \quad + x_3 &= 10 \\
x_1 \quad + 2x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

dengan metode matriks balikan.

Penyelesaian:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\underset{R_3 - R_1}{\overset{R_2 - 3R_1}{\sim}}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 3 & -5 & -3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\sim \ldots \sim
\left[\begin{matrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{matrix}
\;\middle|\;
\underbrace{\begin{matrix}
0 & 0.4 & -0.2 \\
-1 & 0 & 1 \\
0 & -0.2 & 0.6
\end{matrix}}_{A^{-1}}
\right]
$$

Solusinya adalah $x = A^{-1} b$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & -0.2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & + & 4 & - & 1 \\ -5 & + & 0 & + & 5 \\ 0 & - & 2 & + & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

Metode Dekomposisi LU

- Jika matriks *A non-singular* maka ia dapat difaktorkan (diuraikan atau di-dekomposisi) menjadi matriks segitiga bawah *L* (*lower*) dan matriks segitiga atas *U* (*upper*):

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ : & & : & & : \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ : & & & & : \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ : & & & & : \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh, matriks 3×3 di bawah ini difaktorkan menjadi :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Sekali A difaktorkan menjadi L dan U, kedua matriks tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan $Ax = b$.

Metode penyelesaian SPL dengan cara ini dikenal dengan nama **metode dekomposisi *LU***.

Metode ini dinamakan juga **metode pemfaktoran segitiga** (*triangular factorization*).

- Tinjau sistem persamaan lanjar

$$Ax = b$$

- Faktorkan A menjadi L dan U sedemikian sehingga

$$A = LU$$

- Jadi,

$$Ax = b$$

$$LU\,x = b$$

- Misalkan

$$Ux = y$$

maka

$$Ly = b$$

Untuk memperoleh y_1, y_2,…, y_n , kita menggunakan teknik penyulihan maju (*forward substitution*) :

$$Ly = b \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow$$

diperoleh y_1, y_2,…, y_n dengan teknik penyulihan maju

Dan untuk memperoleh solusi SPL, x_1, x_2,…, x_n, kita menggunakan teknik penyulihan mundur (*backward substitution*):

$$Ux = y \quad \rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_n \end{bmatrix} \longrightarrow$$

diperoleh $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan teknik penyulihan mundur

- Jadi, langkah-langkah menghitung solusi SPL dengan metode dekomposi *LU* dapat diringkas sebagai berikut:
  1. Bentuklah matriks L dan U dari A
  2. Pecahkan $Ly = b$, lalu hitung y dengan teknik penyulihan maju
  3. Pecahkan $Ux = y$, lalu hitung x dengan teknik penyulihan mundur

- Terdapat dua metode untuk memfaktorkan A atas L dan U:
  1. Metode *LU* Gauss.
  2. Metode reduksi Crout.

Pemfaktoran dengan Metode LU Gauss

Misalkan matriks A berukuran 4×4 difaktorkan atas L dan U,

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Di sini kita menggunakan simbol m_{ij} ketimbang l_{ij}, karena nilai l_{ij} berasal dari faktor pengali (m_{ij}) pada proses eliminasi Gauss. Langkah-langkah pembentukan L dan U dari matriks A adalah sebagai berikut:

1. Nyatakan A sebagai $A = IA$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U. Tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks I.

3. Setelah seluruh proses eliminasi Gauss selesai, matriks I menjadi matriks L, dan matriks A di ruas kanan menjadi matriks U.

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right]
\longrightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1' \\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_2' \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & b_3' \\
\vdots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n'
\end{array}\right]
$$

Solusinya:

$$
\begin{array}{llll}
x_1 & & & = b_1' \\
& x_2 & & = b_2' \\
& & \ldots & \ldots \\
& & & x_n = b_n'
\end{array}
$$

Seperti halnya metode eliminasi Gauss, tatancang *pivoting* dan penskalaan juga dapat diterapkan pada metoda ini untuk memperkecil galat pembulatan.

- Contoh:

10 (*LU* Gauss naif)

$$A = \begin{matrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{matrix}$$

Eliminasikan matriks *A* di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas *U*, dan tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks *I*.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - (^{-2}/_4)R_1 \\ \sim \\ R_3 - (^1/_4)R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix}$$

Tempatkan $m_{21} = -2/4 = 0.5$ dan $m_{31} = 1/4 = 0.25$ ke dalam matriks *L*:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A,

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 - (^{1.25}/_{-2.5})R_2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan $m_{32} = 1.25/-2.5 = -0.5$ ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

- Contoh:

(*LU* Gauss dengan tata-ancang *pivoting*)

Faktorkan matriks *A* berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lalu pecahkan sistem $Ax = b$.

Penyelesaian:

Eliminasikan matriks *A* di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas *U*, dan tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks *I*.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 - (2)R_1 \\ \sim \\ R_3 - (^1/_1)R_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tempatkan m_{21} = 2 dan m_{31}= 1/1 = 1 ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A. Dalam hal ini ada *pivoting* karena calon *pivot* bernilai 0, sehingga baris kedua dipertukarkan dengan baris ketiga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{0} & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jangan lupa mempertukarkan juga $R_2 \Leftrightarrow R_3$ pada matriks L, kecuali elemen diagonalnya

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 0 \\ \boxed{2} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Jangan lupa mempertukarkan juga $R_2 \Leftrightarrow R_3$ pada vektor b,

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A:

$$R_3 - ({}^0/_2)R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan $m_{32} = 0/2 = 0$ ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Berturut-turut dihitung y dan x sebagai berikut:

$$Ly = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y_1, y_2, dan y_3 dihitung dengan teknik penyulihan maju:

$$\begin{array}{lll} y_1 & = 1 & \\ -y_1 + y_2 & = 1 & \rightarrow\ y_2 = 1 + y_1 = 1 + 1 = 2 \\ 2y_1 + 0y_2 + y_3 & = 5 & \rightarrow\ y_3 = 5 - 2y_1 = 3 \end{array}$$

$$Ux = y \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2, dan x_3 dihitung dengan teknik penyulihan mundur:

$$\begin{array}{lll} 3x_3 & = 3 & \rightarrow x_3 = 1 \\ 2x_2 + 0x_3 & = 2 & \rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 1 & \rightarrow x_1 = 1 \end{array}$$

Jadi, solusi sistem persamaan lanjar di atas adalah $x = (1, 1, 1)^T$.

Pertukaran baris untuk matriks yang berukuran besar diperlihatkan oleh matriks di bawah ini:

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\
0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & d_6 \\
0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 & e_6 \\
0 & 0 & 0 & f_4 & f_5 & f_6
\end{bmatrix}
\underset{(*)}{R_5 \Leftrightarrow R_4}
\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\
0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\
0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 & e_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & d_6 \\
0 & 0 & 0 & f_4 & f_5 & f_6
\end{bmatrix}
$$

Maka, baris ke-5 dan baris ke-4 pada matriks L juga harus dipertukarkan:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 & 0 & 0 \\
m_{51} & m_{52} & m_{53} & x & 1 & 0 \\
m_{61} & m_{62} & m_{63} & x & x & 1
\end{bmatrix}
\underset{(*)}{R_5 \Leftrightarrow R_4}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
m_{51} & m_{52} & m_{53} & 1 & 0 & 0 \\
m_{41} & m_{42} & m_{43} & x & 1 & 0 \\
m_{61} & m_{62} & m_{63} & x & x & 1
\end{bmatrix}
$$